

PSC : Train à lévitation magnétique et Supraconductivité

Rapport Final



Pour le 2 mai 2011

Attié Elie, Hollocou Alexandre, Noël Camille,
Robert Sébastien, Rotival Georges et Sablone Emmanuel

Table des matières

1	Introduction	3
1.1	Les trains à lévitation magnétique existants	3
1.2	Principe de base de fonctionnement de notre train	4
1.3	Enjeux	4
2	Objectifs	5
2.1	Les différentes composantes du projet	5
2.1.1	La modélisation numérique	5
2.1.2	Le modèle expérimental	5
2.2	Méthodologie	5
2.2.1	La modélisation numérique	5
2.2.2	La mise en œuvre expérimentale	6
2.3	Originalité de notre PSC	6
3	Organisation du travail collectif	7
3.1	Répartition des tâches	7
3.1.1	Cellule lévitation	7
3.1.2	Cellule rails	8
3.1.3	Cellule chariot	8
3.2	Mode de travail	8
3.3	Échéancier	8
4	Résultats	10
4.1	Modélisation numérique	10
4.1.1	Modélisation du comportement supraconducteur	10
4.1.2	Modélisation du champ crée par les rails	14
4.1.3	Modélisation de la lévitation du train	19
4.1.4	Modélisation du système de refroidissement	22
4.2	Modèle réduit du train	25
4.2.1	Synthèse du matériau supraconducteur	25
4.2.2	Conception des rails	27
4.2.3	Conception du chariot	28
4.2.4	Mesures et tests	30
4.2.5	Comparaison des mesures avec le modèle numérique	36
5	Côût et financement	38
5.0.6	Côût de fabrication de la pastille	38
5.0.7	Côût de mise en place des rails	39
5.0.8	Côût final et financements	40
5.0.9	Côûts supplémentaires	40

5.1	Ce qu'il reste à faire	40
6	Conclusion	41
6.1	Prévisions du modèle à grande échelle	41
7	Remerciements	44

1 Introduction

Les esprits féconds de la fin du siècle dernier rêvaient d'un homme de l'an 2000 conduisant des voitures volantes, d'adolescents se déplaçant sur des skate-boards lévitant à quelques décimètres du sol... Force est de constater que leurs attentes ont été déçues. Cependant, un train se mouvant sans toucher ses rails est désormais loin d'être une utopie et ce, grâce notamment au phénomène de la supraconductivité découvert il y a 100 ans. Plus précisément, il s'agit de mettre à profit les forces de répulsions existant entre une source de champ magnétique et un matériau supraconducteur dans le but de faire léviter un wagon (chargé dudit supraconducteur) au dessus de rails constitués d'aimants. Notre *projet scientifique collectif* a l'ambition de concevoir une modélisation théorique et informatique ainsi qu'un modèle réduit d'un tel train. Il semble important de spécifier que certains modèles de trains à lévitation magnétique existent d'ores et déjà à échelle industrielle mais utilisent des concepts physiques différents de la supraconductivité.

Par ailleurs, il ne faudrait pas penser que ce projet de "train volant" n'est qu'une lubie de savants n'ayant su dépasser le stade infantile : un tel train possède de nombreux atouts indéniables. En premier lieu, il est intéressant de noter que les trains à lévitation magnétique ont la capacité de gravir des pentes plus raides et de prendre des virages plus serrés que leurs homologues "classiques", avantage qui permettrait de grandement raccourcir certains tracés de voies, notamment dans les pays très montagneux comme la Suisse. De plus, et c'est certainement leur plus grand atout, les trains à lévitation magnétique ne subissent aucun effort de frottement avec leurs rails, ce qui constitue évidemment une amélioration de très grande ampleur. L'impact que peuvent avoir de tels trains est donc non seulement économique mais aussi écologique. C'est d'ailleurs ce constat qui a poussé certains pays à développer leurs propres projets de train à lévitation magnétique.

1.1 Les trains à lévitation magnétique existants

Comme énoncé précédemment, plusieurs modèles de trains à lévitation magnétique ont déjà été développés à l'échelle industrielle mais aucun d'eux n'utilise la propriété d'exclusion magnétique propre aux supraconducteurs, propriété sur laquelle repose notre projet. Citons en premier lieu le Maglev de Shanghai et son cousin Japonais qui utilisent des bobines supraconductrices embarquées, utilisées pour leur absence de résistivité à faible température, couplées à des électroaimants disposés le long des voies ; la lévitation est alors due au fait que les champs magnétiques générés respectivement par les bobines et les électroaimants se repoussent. Viennent ensuite les cas du Transrapid allemand et du Swissmetro helvétique. Ces deux projets (le Swissmetro étant encore à l'état de prototype) utilisent un couplage d'électroaimants placés sur le train et les rails qui se repoussent mutuellement. A noter également que le projet suisse prévoit l'utilisation d'un réseau de tunnels dans lesquels le vide serait fait de manière à éradiquer les frottements fluides sur le train.



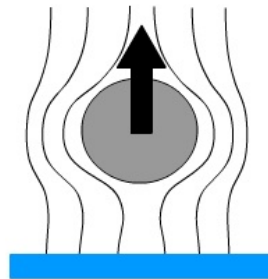
Le Transrapid allemand



Le Maglev japonais

1.2 Principe de base de fonctionnement de notre train

On voit donc désormais poindre l'intérêt et la spécificité de notre projet en comparaison de ceux cités ci-dessus. En effet, notre train léviterait grâce à une propriété intrinsèque des matériaux supraconducteurs : l'expulsion du flux magnétique. Cette expulsion est une propriété fondamentale en théorie de la supraconductivité, tout comme l'absence de résistance électrique à très basse température. Cette expulsion peut être totale (effet Meissner) ou partielle. Une des conséquences de cette propriété est la suivante : lorsque l'on approche un supraconducteur d'un aimant, une force de répulsion apparaît et a pour effet de mener le matériau supraconducteur vers les zones où le champ est plus faible et peut de ce fait compenser l'action du poids. L'intérêt d'un projet comme le notre par rapport à ceux cités ci-dessus réside donc dans le fait que la seule énergie à fournir concerne le refroidissement du matériau supraconducteur.



Vision schématique d'une sphère supraconductrice au dessus d'un aimant

1.3 Enjeux

Un des principaux enjeux de notre projet repose sur l'économie d'énergie que permettrait un système comme notre train. Lorsque l'on connaît l'importance du transport ferroviaire et le coût montant de l'énergie, on comprend les importantes retombées économiques que pourrait avoir la lévitation supraconductrice. A titre d'exemple, les trains du réseau SNCF ont une consommation annuelle moyenne de plus de 1 TWh. Ainsi une économie ne serait-ce que de quelques pour-cents représenterait des sommes considérables. De plus, 2011 est l'année de la supraconductivité donc un autre enjeu de notre PSC serait d'offrir une illustration concrète des propriétés des supraconducteurs et de participer ainsi à leur mise à l'honneur.

2 Objectifs

À la base de notre projet PSC, il y a deux objectifs principaux. Le premier consiste en la compréhension théorique du phénomène de supraconductivité et en sa **modélisation numérique**. Le but est de disposer d'un modèle informatique du train permettant de prédire l'efficacité d'un tel moyen de transport selon différents paramètres ajustables. Notre second objectif est de **concevoir expérimentalement un modèle réduit du train** permettant de vérifier la qualité du modèle numérique, ainsi que de cerner les difficultés liées à la mise en pratique de la supraconductivité.

2.1 Les différentes composantes du projet

2.1.1 La modélisation numérique

L'objectif que nous avons recherché dans cette partie du projet est l'obtention d'un outil informatique permettant de simuler le fonctionnement d'un train à lévitation magnétique s'appuyant sur le phénomène de supraconductivité. Cet outil propose aujourd'hui l'ajustement de différents paramètres tels que les dimensions du train, les propriétés des aimants constituant les rails ainsi que les caractéristiques du matériau supraconducteur utilisé, et il simule en retour la lévitation du train en calculant différentes données telles que la hauteur de lévitation et l'autonomie dans le temps du système. La visée de ce modèle numérique consiste en la prévision de la faisabilité et de l'efficacité d'un tel train à lévitation magnétique aussi bien à échelle réduite qu'à plus grande échelle.

2.1.2 Le modèle expérimental

Notre objectif ici a été de concevoir une maquette réduite de train à lévitation magnétique. Plus précisément, nous avons cherché à élaborer un chariot lévitant de façon stable au dessus de rails aimantés et pouvant se déplacer librement en suivant leur profil. Cette partie du travail visait à la fois à vérifier la validité de l'outil informatique développé décrit plus haut, ainsi qu'à repérer les difficultés liées à l'application pratique de la supraconductivité. Afin que cette étude soit la plus complète possible, nous avons cherché à réaliser chaque étape nous-mêmes, de la conception du matériau supraconducteur à celle du chariot final, en passant par la mise en place des rails aimantés.

2.2 Méthodologie

2.2.1 La modélisation numérique

Bien entendu une telle modélisation doit s'appuyer sur une grande compréhension théorique du phénomène de supraconductivité. Ce dernier est relativement complexe surtout depuis la découverte en 1980 des matériaux supraconducteurs dits à *haute température* qui ont justement ouvert la voie vers des applications pratiques de la supraconductivité. Il nous a donc fallu aller à la recherche de modèles scientifiques permettant de décrire convenablement le phénomène de lévitation, alors même que la théorie des supraconducteurs à haute température est en plein développement.

Notre travail sur ce point a commencé avec l'apprentissage des bases de la théorie de la supraconductivité avec notre tuteur Kees Van Der Beek. Ce dernier a été très présent durant le premier mois de notre projet et s'est chargé de cet enseignement. Nous avons ensuite commencé nos recherches de manière plus autonome en nous appuyant sur des ouvrages mais, avant tout, comme le montre notre bibliographie, sur des articles de journaux scientifiques. La synthèse de ces documents nous a finalement permis d'établir un modèle théorique convaincant pour mettre en place la modélisation numérique que nous visions.

2.2.2 La mise en œuvre expérimentale

Une des principales difficultés du projet résidait dans la contrainte en temps qui le cadrait. Il était impossible de traiter dans un premier temps la modélisation puis, dans un second temps, la mise en œuvre pratique comme il semblait logique de procéder. Il nous a donc fallu commencer en parallèle l'élaboration expérimentale du modèle réduit alors même que nous développons l'aspect modélisation. Par conséquent, nous avons débuté très tôt l'étape clef de la partie expérimentale de notre projet, à savoir la synthèse du matériau supraconducteur. Cependant nous avons attendu d'avoir nos premières données numériques avant de concevoir les rails et le chariot et de refondre le matériau supraconducteur pour qu'il ait la forme voulue. Ainsi, notre modèle numérique est intervenu en amont de certains choix décisifs pour le modèle expérimental, et ce dernier a permis en aval, par le biais de mesures, de vérifier la validité de l'outil informatique et d'en modifier les erreurs.

2.3 Originalité de notre PSC

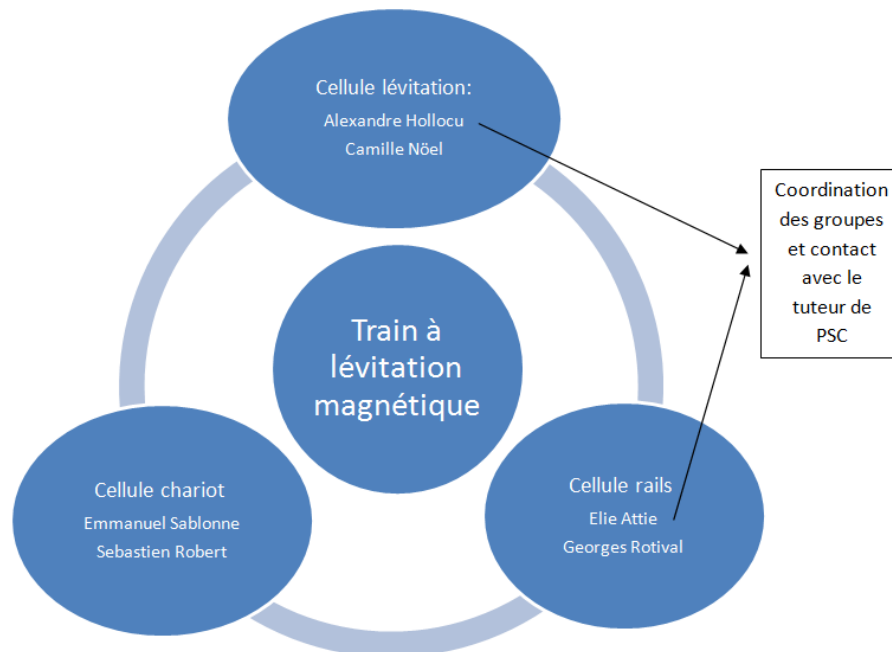
Notre projet scientifique collectif n'est pas le premier projet universitaire comprenant la conception d'une maquette de train à lévitation magnétique utilisant la supraconductivité. Cependant, le travail de modélisation numérique effectué, et notamment son aspect paramétrable, sont inédits à notre connaissance. En effet, nous n'avons pas recensé de projets de trains à lévitation magnétique comportant à la fois une maquette expérimentale et un modèle numérique ajustable.

Le modèle numérique est pourtant un des aspects majeurs dans ce type de travail, car c'est lui qui permet de prédire ce qui dépend de l'échelle de la maquette et ce qui peut être généralisé à plus grande échelle. Notre étude permet ainsi de donner des éléments de conclusions quant à l'efficacité de la supraconductivité à grande échelle, même si de nombreux autres paramètres seraient à prendre en compte pour estimer la viabilité d'une exploitation industrielle de tels trains.

3 Organisation du travail collectif

3.1 Répartition des tâches

Nous avons organisé la répartition du travail selon les compétences de chacun. Nous vous présentons ici la répartition des tâches selon les équipes et l'échéancier. Trois cellules de deux élèves ont été mises en place, chacune ayant un rôle précis mais restant en étroite communication afin de ne pas perdre de temps.



3.1.1 Cellule lévitation

La cellule lévitation s'est occupée de tout ce qui touchait directement à la supraconductivité. C'est elle qui a pris en charge les recherches documentaires pour l'élaboration d'une bonne modélisation du comportement du matériau supraconducteur. Elle a été amenée à travailler en étroite contact avec la *cellule rail* afin de développer le modèle numérique final. Sur la partie expérimentale, c'est cette cellule qui a supervisé les différentes mesures sur le matériau supraconducteur, et c'est également elle qui a orienté les choix concernant la refonte d'une nouvelle pastille.

3.1.2 Cellule rails

La cellule rails a tout d'abord pris en charge la modélisation du champ magnétique créée par les rails aimantés. Elle a été amenée à faire de nombreuses recherches documentaires sur ce sujet afin de développer un outil efficace de calcul numérique du champ, tout en travaillant en collaboration avec la cellule lévitation afin de répondre à leurs attentes. Elle s'est ensuite occupée de la conception des rails, et a effectué un certain nombre de démarches pour l'obtention de sponsors et de subventions afin de pouvoir se procurer les aimants et la plaque de support nécessaires.

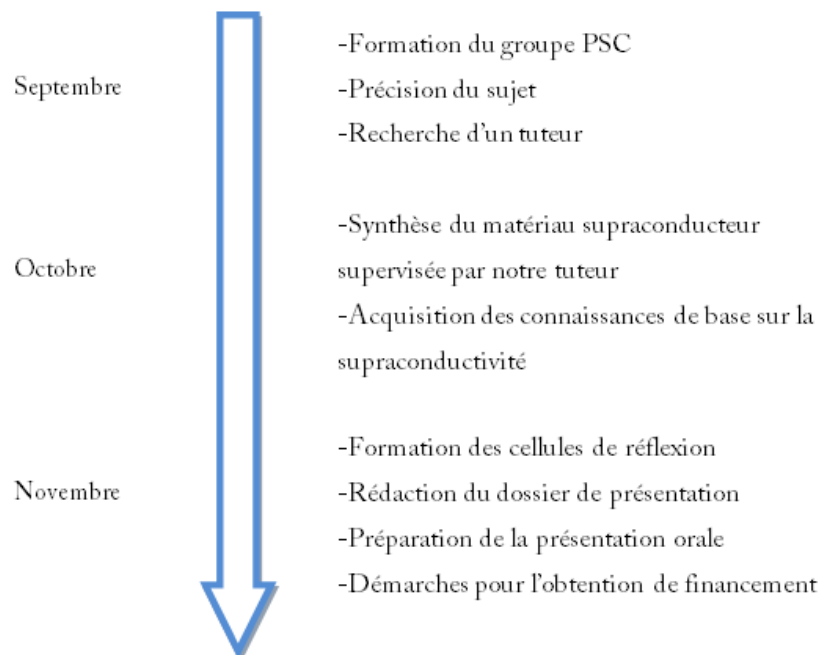
3.1.3 Cellule chariot

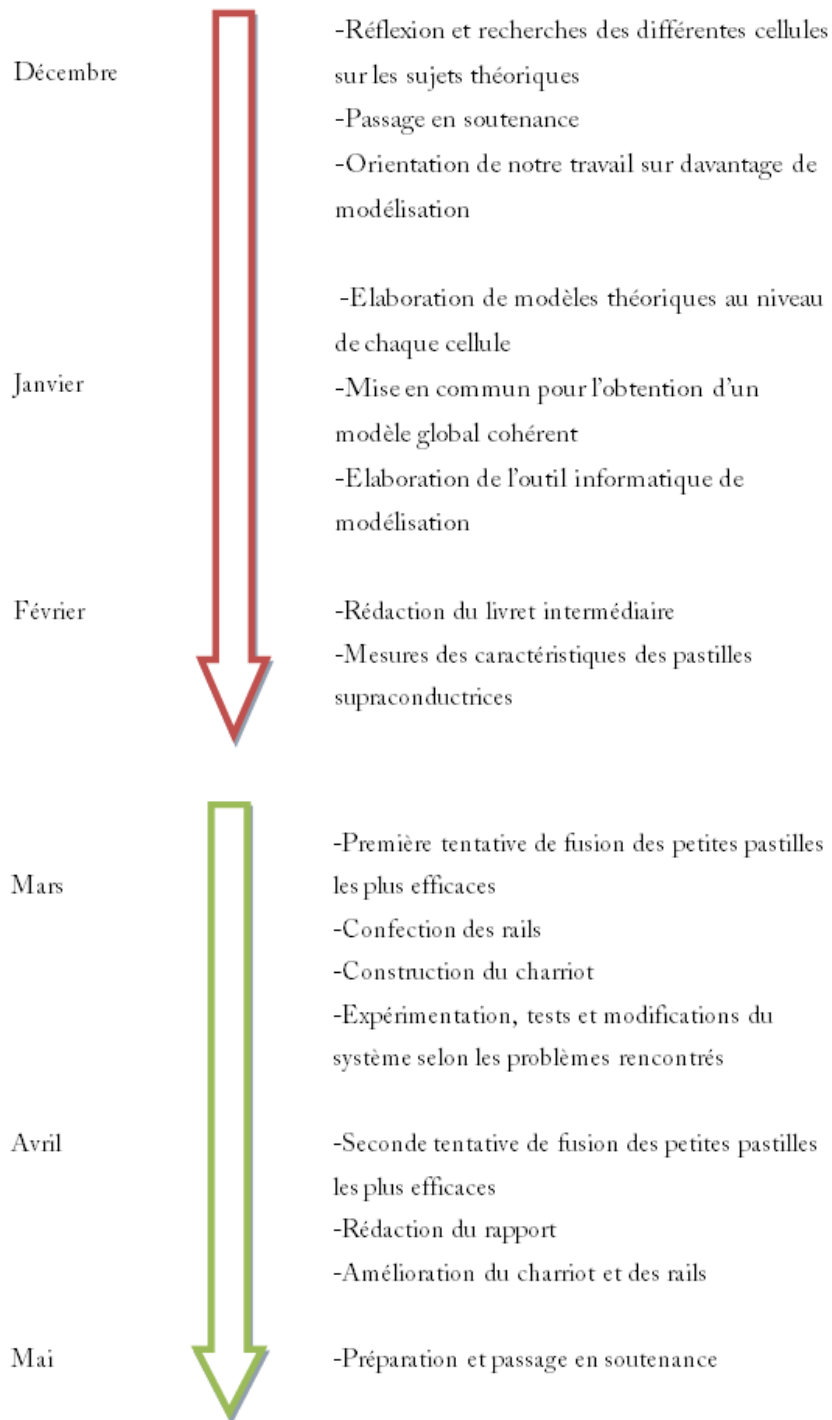
La cellule chariot s'est attachée à la conception du chariot devant léviter au-dessus des rails. Elle a dû traiter avec deux impératifs : la légèreté du chariot et son mode de refroidissement. En effet, la lévitation supraconductrice nécessite de travailler à très basse température et le problème du refroidissement est central. Ainsi la cellule chariot a développé un modèle théorique et numérique permettant de prévoir l'autonomie dans le temps du mode de refroidissement. Concernant la partie expérimentale, cette cellule s'est attelée à la confection même du chariot puis à son optimisation, notamment en terme de poids.

3.2 Mode de travail

Afin que l'information soit la mieux partagée, des réunions hebdomadaires entre les différents membres du groupe étaient organisées et un contact étroit par mail était entretenu avec notre tuteur de stage. La répartition du travail était effectuée à ce moment-là afin d'établir les tâches à court et long terme essentielles au développement de notre projet.

3.3 Échéancier





4 Résultats

Nous allons maintenant présenter les résultats obtenus lors de notre projet PSC. Dans un premier temps nous indiquerons les résultats obtenus concernant la modélisation numérique du train, puis nous nous intéresserons aux résultats touchant au modèle réduit élaboré en laboratoire.

4.1 Modélisation numérique

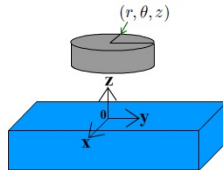
Notre modélisation comportait plusieurs parties. Tout d'abord il nous a fallu modéliser le comportement du matériau supraconducteur, puis modéliser le champ magnétique créé par les rails, le tout afin d'obtenir une simulation numérique de la lévitation de notre train. Nous avons également modélisé séparément le système de refroidissement de notre pastille supraconductrice, afin de pouvoir prédire l'autonomie de notre système dans le temps. Nous présentons ici l'élaboration de ces différentes composantes du modèle numérique ainsi que les résultats que chacune d'elles nous ont procuré. Avant cela, nous commençons par présenter brièvement les éléments de théorie de la supraconductivité nécessaires à la compréhension de la suite.

4.1.1 Modélisation du comportement supraconducteur

Dans toute notre modélisation théorique et numérique nous considérerons que le matériau supraconducteur se présente sous forme de pastilles cylindriques. L'objectif de cette partie est de montrer comment nous sommes parvenus à tirer parti du *modèle de Bean* dont il a été question plus haut, afin de modéliser la réaction d'une pastille à un champ magnétique donné.

Nous voulons ici connaître la force qui s'exerce sur la pastille cylindrique supraconductrice en présence d'un champ magnétique. La pastille a pour rayon R et hauteur h . On notera \vec{B}_a le champ magnétique extérieur *i.e.* le champ appliqué en l'absence du matériau supraconducteur.

On utilise la base cylindrique $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$ telle que l'axe de la pastille supraconductrice cylindrique est dirigé selon \vec{e}_z .



La théorie magnétostatique nous donne une expression de la force que nous cherchons **sous l'hypothèse de faibles variations spatiales de \vec{B}_a** :

$$\vec{F} = (\vec{m} \cdot \vec{\nabla}) \vec{B}_a$$

où \vec{m} est le moment magnétique de notre pastille supraconductrice défini par :

$$\vec{m} = \frac{1}{2} \int_V \vec{r}' \wedge \vec{j}(\vec{r}') d^3r'$$

On connaît également l'énergie potentielle de la pastille :

$$E_p = -\vec{m} \cdot \vec{B}_a$$

Nous supposons que le champ extérieur \vec{B}_a varie faiblement ce qui permet d'utiliser les expressions ci dessus. De plus, nous nous placerons dans le cadre du *modèle de l'état critique* de *C. P. Bean* introduit plus haut. Rappelons que dans ce modèle, la densité de courant \vec{j} dans la pastille est soit nulle, ou a pour module la valeur critique j_c . Nous supposons que la valeur de j_c ne dépend ni de la position, ni du champs \vec{B} environnant.

Par ailleurs, nous nous plaçons dans le cadre suivant : la pastille a été refroidie en l'absence de champ magnétique, puis on lui a appliqué le champ magnétique \vec{B}_a . Cette façon de procéder est couramment appelée *Zero Field Cooled*. Ce procédé peut être décomposé en trois phases : le passage de l'état normal à l'état supraconducteur en l'absence de champ magnétique, l'application du champ magnétique pendant laquelle l'intensité de ce dernier croît avec le temps de zéro jusqu'à B_a , et finalement une phase où le champ demeure constant. Durant la seconde phase, il se produit un phénomène d'induction dû à la variation du champ magnétique et des courants naissent dans le supraconducteur.

Ce sont les régions proches de la surface latérale qui ressentent ces variations. Ainsi, par symétrie cylindrique on peut supposer que les courants ne circulent que dans une couronne d'un certain rayon R_p (rayon de pénétration, éventuellement nul). On a donc :

$$|j(\vec{r}')| = \begin{cases} j_c & \text{si } R_p < r < R \text{ (matériau dans l'état critique)} \\ 0 & \text{si } r < R_p \end{cases}$$

On souhaite connaître R_p afin de pouvoir exprimer la force de lévitation en fonction du courant critique (qui est un **paramètre du matériau**) et du champ appliqué uniquement. Pour cela, il est nécessaire de relier la densité de courant \vec{j} au champ magnétique *total* \vec{B} dans la pastille supraconductrice.

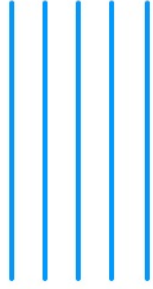
Comme le champ électrique \vec{E} est constant, les équations de Maxwell nous donnent :

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$$

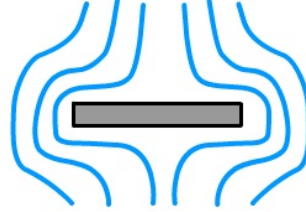
Par symétrie cylindrique de la pastille on peut supposer que \vec{j} est dirigée selon \vec{e}_θ ($\vec{j} = j(\vec{r}')\vec{e}_\theta$), d'où :

$$\frac{\partial B_r}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial r} = \mu_0 j(\vec{r}')$$

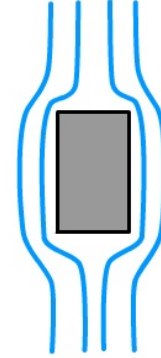
Une étude qualitative montre que, pour une pastille cylindrique dans un champ magnétique essentiellement longitudinal, le terme $|\frac{\partial B_z}{\partial z}|$ est d'autant plus faible que la pastille est épaisse. Pour s'en convaincre, il suffit de tracer l'allure des lignes de champs pour une pastille cylindrique dans un champ longitudinal. En se rappelant que la pastille expulse une grande partie du champ magnétique, on obtient :



Lignes de champs en l'absence de pastille



Lignes de champs en présence d'une pastille fine



Lignes de champs en présence d'une pastille épaisse

On observe que les lignes de champs sont moins courbées pour une pastille plus épaisse, ce qui correspond effectivement à un terme $|\frac{\partial B_r}{\partial z}|$ faible.

Nous supposons que le champ magnétique appliqué est **essentiellement longitudinal**, et que la pastille est assez épaisse pour que :

$$|\frac{\partial B_r}{\partial z}| \ll |\frac{\partial B_z}{\partial r}|$$

Ainsi, l'équation précédente se simplifie en :

$$\frac{\partial B_z}{\partial r} = -\mu_0 j(\vec{r})$$

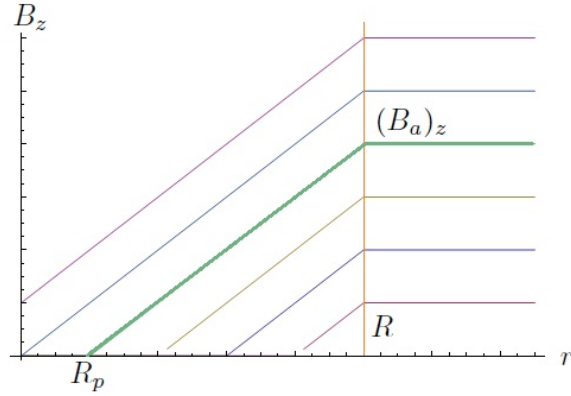
On se place toujours sous l'hypothèse d'un champ appliqué quasi-uniforme. Par conséquent, l'équation précédente s'intègre, sachant que l'expression de $|\vec{j}|$ a été donnée plus haut, et que l'on a les conditions aux limites $\vec{B} = \vec{B}_a$ sur la surface latérale, et $|\vec{B}|$ minimal au centre du matériau (car les vortex rentrent par la surface latérale et commencent par peupler les régions proches du bord). On obtient donc pour $|(B_a)_z|$ assez faible :

$$B_z = \begin{cases} 0 & \text{si } r < R_p \\ \epsilon \mu_0 j_c (r - R_p) & \text{si } R_p < r < R \\ (B_a)_z & \text{si } r > R \end{cases}$$

et pour $|(B_a)_z| > \mu_0 j_c$:

$$B_z = \begin{cases} \epsilon \mu_0 j_c (r - R) + (B_a)_z & \text{si } r < R \\ (B_a)_z & \text{si } r > R \end{cases}$$

avec $\epsilon = \pm 1$ selon le signe de $(B_a)_z$. On a utilisé la loi de Lenz pour déterminer le sens du courant induit \vec{j} : on a $j_\theta < 0$ si $(B_a)_z > 0$, et $j_\theta > 0$ sinon.



Ceci permet d'exprimer R_p en fonction de $H_a = \frac{|(B_a)_z|}{\mu_0}$, j_c et R :

$$R_p = \max \left[R - \frac{H_a}{j_c}, 0 \right]$$

On peut alors calculer \vec{m} de manière explicite :

$$\vec{m} = \frac{1}{2} \int_V \vec{r} \wedge \vec{j}(\vec{r}) d^3r = m \vec{e}_z$$

$$\begin{aligned} m &= -\epsilon \frac{1}{2} \int_{r=R_p}^R \int_{z=0}^h \int_{\theta=0}^{2\pi} (r j_c) r dr d\theta dz \\ &= -\epsilon \pi h j_c \left[\frac{R^3}{3} - \frac{R_p^3}{3} \right] \end{aligned}$$

On a donc :

$$m = \begin{cases} -\epsilon \pi h R^3 j_c \left[\left(\frac{H_a}{R j_c} \right) - \left(\frac{H_a}{R j_c} \right)^2 + \frac{1}{3} \left(\frac{H_a}{R j_c} \right)^3 \right] & \text{si } \frac{H_a}{R j_c} < 1 \\ -\frac{1}{3} \epsilon \pi h R^3 j_c & \text{sinon} \end{cases}$$

Finalement, on peut exprimer la force en fonction des données R , h , j_c et du paramètre $H_a = \frac{|(B_a)_z|}{\mu_0}$:

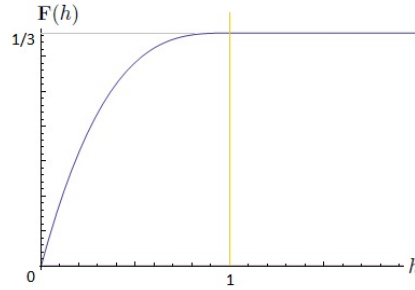
$$\vec{F} = -\pi \mu_0 h R^3 j_c \mathbf{F} \left(\frac{H_a}{R j_c} \right) \frac{\partial H_a}{\partial z} \vec{e}_z$$

ainsi que l'énergie potentielle :

$$E_p = \pi \mu_0 h R^3 j_c \mathbf{F} \left(\frac{H_a}{R j_c} \right) H_a$$

où :

$$\mathbf{F}(x) = \min \left[x - x^2 + \frac{x^3}{3}, 1/3 \right]$$



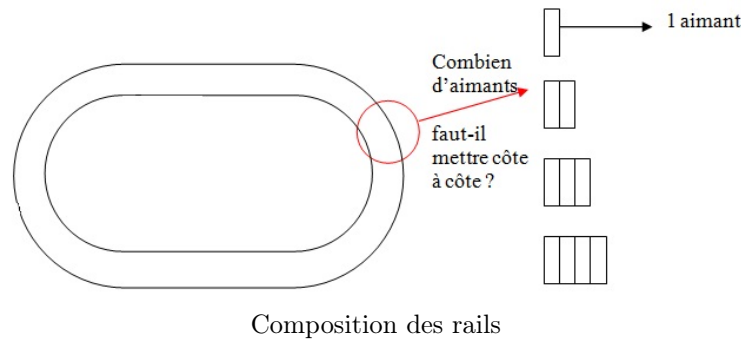
Rappelons les **hypothèses** faites sur \vec{B}_a pour obtenir les expressions ci-dessus :

- Les variations du champs \vec{B}_a doivent être faibles autour du supraconducteur
- Le champ \vec{B}_a doit être essentiellement longitudinal

4.1.2 Modélisation du champ crée par les rails

Choix de la composition des rails

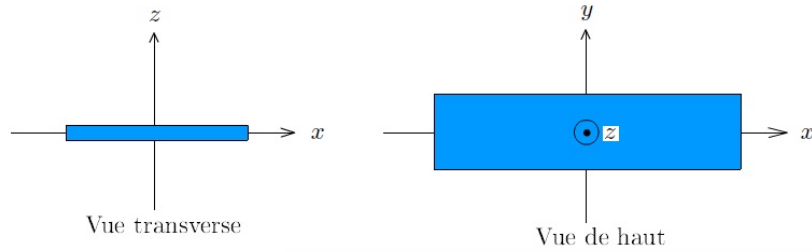
Dans cette partie, nous expliquons les considérations théoriques qui nous ont amené à choisir la nature des rails aimantés que nous allons utiliser, tant pour l'établissement du modèle numérique que pour notre modèle réduit.



L'importance de la composition des rails est double. D'une part, nous voulons que la pastille supraconductrice lévite au dessus de ceux-ci. D'autre part, nous souhaitons que cette lévitation soit la plus stable possible. Cette stabilité s'exprime ainsi : nous voulons que le train soit tenu de rester dans l'axe des rails, c'est à dire qu'il suive leur profil lorsqu'il se déplace librement.

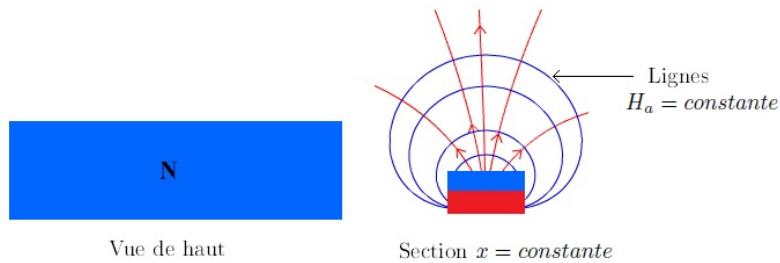
Ces deux critères peuvent s'exprimer respectivement à l'aide de la force de lévitation et à l'aide de l'énergie potentielle calculée plus haut. On voit immédiatement que l'intensité de \vec{F} dépend principalement de l'intensité du champ \vec{B}_a et de son gradient (une étude plus précise sera menée plus bas), et donc que c'est la puissance des aimants composant les rails, plus que leur disposition, qui va déterminer si on observe ou non le phénomène de lévitation. C'est donc ici l'expression de l'énergie potentielle E_p , qui est en relation avec la stabilité du train, qui va nous intéresser avant tout.

Pour une courte étude de la stabilité, on considère une portion de rail orthogonale à l'axe \vec{e}_z et dirigée selon \vec{e}_x .



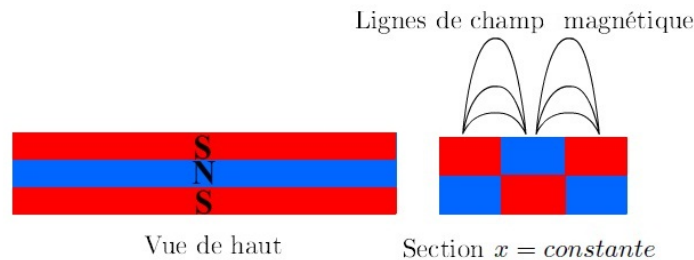
Nous voudrions que le train reste centré en $y = 0$, donc que l'énergie potentielle sur une tranche $x = \text{constante}$ présente un minimum (correspondant à une *position d'équilibre stable*) en $y = 0$. Étant donné la forme de E_p , nous souhaiterions de manière équivalente que H_a présente un minimum en $y = 0$. Précisons que nous regardons ce minimum à une hauteur z donnée, qui est la hauteur de lévitation.

Nous allons utiliser des aimants pour construire les rails. Considérons une première solution qui n'utilise qu'un seul aimant sur la largeur des rails (avec le pôle nord au dessus et le pôle sud en dessous, ou inversement).



On voit qualitativement, en connaissant la forme générale du champ créé par un aimant, que, pour une hauteur z donnée, le champ va être maximal en $y = 0$ et décroître si on s'éloigne de cette position. Ceci se lit sur le schéma de droite à l'aide des lignes équi- H_a . Ainsi le train aura naturellement tendance à dérailler dans cette configuration.

Une meilleure solution consiste à utiliser trois aimants sur une largeur de rail et à choisir des orientations différentes pour deux aimants côte à côte :

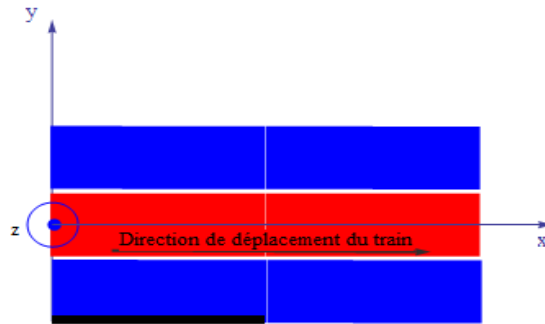


On voit sur le schéma de droite que les lignes de champ magnétique à expulser sont moins nombreuses au centre des rails. On doit donc certainement avoir une position d'équilibre stable en $y = 0$. Cette composition des rails a donc de forte chance de proposer une bonne stabilité. C'est cette disposition des aimants que nous avons choisi pour notre modèle numérique.

Simulation numérique du champ magnétique crée par les rails

Description du processus de simulation :

Nous nous sommes basés sur l'hypothèse selon laquelle le champ magnétique dans une section transverse aux rails est toujours le même. Ainsi, nous nous sommes constamment intéressés au champ magnétique crée par une portion de rail composée d'uniquement trois aimants.



On se place dans un repère cartésien où la longueur des aimants est suivant l'axe \vec{Ox} et leur largeur suivant l'axe \vec{Oy} , direction suivant laquelle les aimants sont posés côte à côte. La hauteur des aimants est suivant l'axe \vec{Oz} .

Afin d'obtenir le champ généré par la portion, on commence par simuler le champ généré uniquement par l'un des aimants. On néglige l'influence des aimants voisins sur celui que l'on étudie. On obtient ensuite le champ crée par une portion complète de rail par superposition de trois aimants.

Pour modéliser notre aimant, on utilise des **spires rectangulaires** superposées de manière continue. Ces spires occupent la longueur et la largeur de l'aimant et sont superposées sur toute sa hauteur.



On connaît l'expression analytique exacte du champ magnétique créé par un fil rectiligne parcouru par une intensité I et donc celle du champ créé par une spire rectangulaire parcouru par le même courant. On utilise le logiciel **Mathematica** qui permet d'effectuer des simulations numériques. La procédure de simulation est la suivante. Tout d'abord, on crée une fonction qui permet de simuler le champ magnétique généré par un fil parcouru par un courant I . On crée ensuite une fonction qui superpose les champs créés par 4 fils formant une spire rectangulaire. Pour finir on crée une fonction *aimant* qui permet de calculer numériquement le champ créé par un aimant, par intégration du champ créé par une spire sur la hauteur de l'aimant.

Utilisation des données fournisseurs :

L'étape suivante pour rendre notre modélisation concrète consiste à *relier les données du fournisseur au données nécessaires pour simuler le champ, i.e.* l'intensité du courant qui parcourt les spires.

La donnée la plus importante du fournisseur est le **champ de rémanence**. Ce champ est la magnétisation résiduelle du matériau après suppression du champ magnétisant extérieur. Une approximation très correcte consiste à considérer qu'il s'agit du *champ créé par l'aimant à sa surface*.

On se place donc à l'aide de notre fonction *aimant* à la surface de notre aimant en $z = 0$. On constate que le champ varie avec y , ce qui nous amène à considérer la **valeur moyenne** sur la largeur y de la norme du champ magnétique. On cherche maintenant à relier cette valeur moyenne à la surface de l'aimant (fonction linéaire de l'intensité du courant parcourant les spires) à la valeur du champ de rémanence.

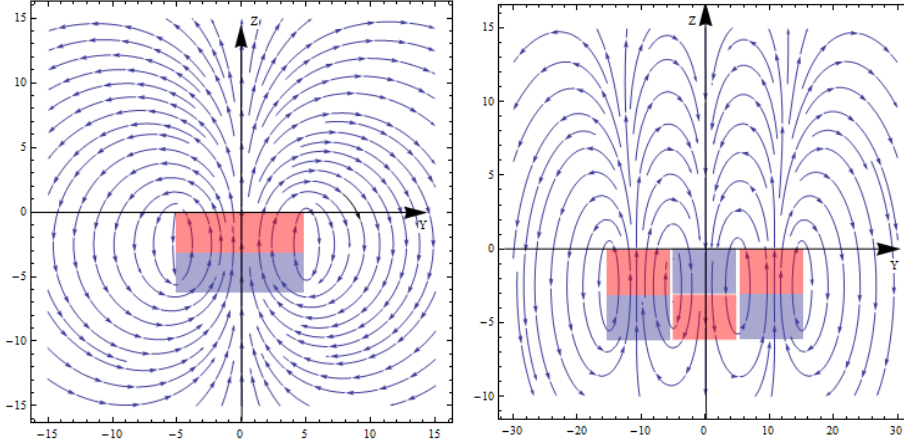
La résolution numérique de cette question est en théorie tout à fait abordable étant donné que le champ dépend linéairement de I . Cependant un problème se pose quand on essaie d'inclure les points $y = \pm \frac{l}{2}$ dans notre calcul de moyenne. En effet, en se plaçant en ces points, on se place directement sur la spire, et à cet endroit la norme du champ magnétique tend vers l'infini. Le calcul de notre valeur moyenne est rendu impossible car les intégrales que nous voulons calculer sont *divergentes*.

Pour résoudre ce problème, on prend en compte le fait que les fournisseurs des aimants signalent généralement qu'une erreur au centième est commise sur la mesure des dimensions de l'aimant. On peut donc, avec une bonne approximation, faire la moyenne de nos mesures sur $l - 0.01 \times l$, l étant la largeur de l'aimant. On exclut donc le contour de l'aimant de nos calculs et les intégrales deviennent convergentes.

En partant de cette approximation, on crée une fonction qui prend en donnée Br , le champ de rémanence fourni par le commerçant, et retourne la valeur du courant I qui parcourt nos spires. On peut maintenant **calculer numériquement** le champ magnétique à partir des données du fournisseur : l_a la largeur, L_a la longueur et h_a la hauteur de l'aimant, ainsi que Br le champ de rémanence.

Tracé des lignes de champs :

A partir de notre modèle, on est capable d'obtenir un tracé des lignes de champs générées par un aimant parallélépipédique, et ensuite par superposition on peut obtenir les lignes de champs générés par les trois aimants placés les uns à côté des autres. On obtient ainsi, dans le plan de symétrie perpendiculaire à la longueur de l'aimant l'allure des lignes de champs suivants, pour un champ de rémanence de $1,3 \text{ Tesla}$ et des aimants de dimensions $40 \times 10 \times 5 \text{ mm}$ (ce qui correspond aux aimants choisis pour notre modèle réduit) :



Tracé des lignes de champ magnétique pour une section transversale des rails constituée à gauche de 1 aimant et à droite de 3 aimants (longueurs en mm)

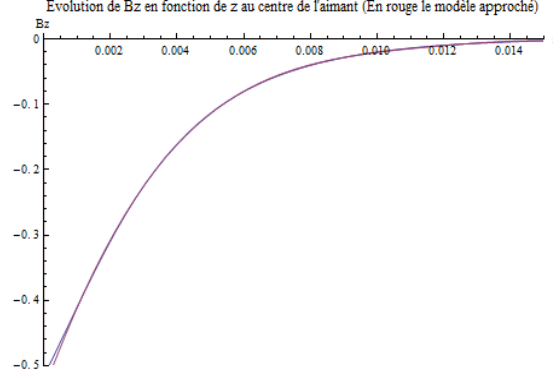
On constate que la forme du champ généré par un ou trois aimants est bien en accord avec les profils qui nous ont permis de choisir la composition des rails.

Calcul numérique de $\frac{\partial B_z}{\partial z}$:

La force de lévitation qui s'exerce sur la pastille supraconductrice dépend, comme nous l'avons vu, non seulement du champ magnétique créée par l'aimant, mais aussi du gradient de sa composante B_z suivant \vec{Oz} : $\frac{\partial B_z}{\partial z}$. Dans la partie où nous avons établi ce résultat, on s'est placé dans l'approximation suivant laquelle, autour du centre de l'aimant, la variation de la composante B_z est faible. On se place ainsi, pour la suite de nos calculs, sur l'axe \vec{Oz} , on pose donc $x = y = 0$.

Dans les sous-parties précédentes, on a procédé à un calcul numérique du champ magnétique généré par un aimant. Cela nous permet d'accéder aux lignes de champs et aux valeurs numériques des composantes de \vec{B} , mais cela ne nous permet pas d'accéder directement à l'expression analytique de ces composantes. Ainsi nous ne pouvons pas directement accéder à l'expression de $\frac{\partial B_z}{\partial z}$.

Pour remédier à ce problème, on cherche à approximer B_z par une fonction polynomiale. On sait que notre champ magnétique dépend linéairement de l'intensité du courant dans les spires. Donc afin de trouver l'expression de B_z en fonction de I , on fixe dans nos calculs $I = 1 \text{ A}$. Puis une simple multiplication des expressions trouvées par I donne le résultat cherché en fonction de I , qui est directement lié à l'aimantation de l'aimant par l'intermédiaire du champ de rémanence Br .



Composante B_z du champ magnétique et son approximation polynomiale

Ensuite, on dérive la fonction d'approximation polynomiale par rapport à z pour accéder au gradient de B_z suivant \vec{Oz} . C'est ainsi que l'on obtient une approximation de la fonction $\frac{\partial B_z}{\partial z}$, ce qui conclut la partie modélisation du champ créée par les rails.

4.1.3 Modélisation de la lévitation du train

Dans cette partie, nous décrivons la modélisation globale de la lévitation du train qui tire partie des deux sections précédentes.

Calcul numérique de la force de lévitation :

Maintenant que l'on a accès à l'expression numérique du champ créé par les rails, on peut *calculer numériquement* la force qui s'exerce sur une pastille supraconductrice cylindrique. Rappelons l'expression de cette force en fonction de $H_a = \frac{|(B_a)_z|}{\mu_0}$:

$$\vec{F} = -\pi\mu_0 h R^3 j_c \mathbf{F} \left(\frac{H_a}{R j_c} \right) \frac{\partial H_a}{\partial z} \vec{e}_z$$

où :

$$\mathbf{F}(x) = \min \left[x - x^2 + \frac{x^3}{3}, 1/3 \right]$$

Cette force dépend de différents paramètres : le rayon R de la pastille, sa hauteur h et la densité de courant critique j_c . Le champ magnétique appliqué fait quant à lui intervenir les dimensions des aimants l_a , L_a et h_a ainsi que le champ de rémanence Br . Remarquons que nous avons une certaine liberté pour fixer R et h (la pastille doit cependant rester suffisamment épaisse pour que notre modèle reste valide), mais que j_c est un *paramètre caractéristique* du matériau supraconducteur.

Dans la partie précédente nous avons programmé deux fonctions de z qui calculent des approximations des quantités $(B_a)_z$ et $\frac{\partial (B_a)_z}{\partial z}$ en $y = 0$ et $x = 0$ (il y a de toute manière invariance de notre problème par translation de vecteur \vec{e}_x).

On programme, grâce à ces deux fonctions, la nouvelle fonction de z : *Force* qui donne l'expression de la force \vec{F} en projection sur \vec{e}_z . Cette fonction dépend des paramètres h , R et j_c , ainsi que de L_a , l_a , h_a et Br .

Hauteur de lévitation :

On sait qu'à l'équilibre la pastille doit vérifier :

$$\vec{F} + m\vec{g} = \vec{0}$$

où m est la masse que doit supporter la pastille.

La masse que doit supporter la pastille est :

$$m = m_{pastille} + m_{chariot}$$

où $m_{pastille}$ et $m_{chariot}$ sont les masses de la pastille et du chariot.

Il est facile de calculer $m_{pastille}$ en fonction de R , h et de la densité du matériau supraconducteur. On programme une fonction *Poids* qui prend en paramètre les dimensions de la pastille, sa densité et la masse du chariot et calcule la projection du poids $m\vec{g}$ sur \vec{e}_z en fonction de ces paramètres.

Maintenant que l'on dispose des fonctions *Poids* et *Force*, nous pouvons résoudre numériquement l'équation d'équilibre donnée ci-dessus et donc connaître numériquement la hauteur de lévitation en fonction des paramètres h , R , j_c , l_a , L_a , h_a , $m_{chariot}$, Br et de la densité d de la pastille.

Nous pouvons également ajouter la possibilité de disposer plusieurs pastilles identiques sous le chariot, il suffit alors d'additionner les forces de lévitation de chaque pastille. On rajoute ainsi un paramètre $N_{pastille}$.

Prédiction en amont du modèle numérique concernant le modèle réduit

Nous avons utilisé notre modèle numérique pour le choix des aimants pour notre maquette de train. Il nous a également permis de confirmer le choix du matériau supraconducteur, choix que nous avons déjà effectué étant données les contraintes de temps cadrant notre projet.

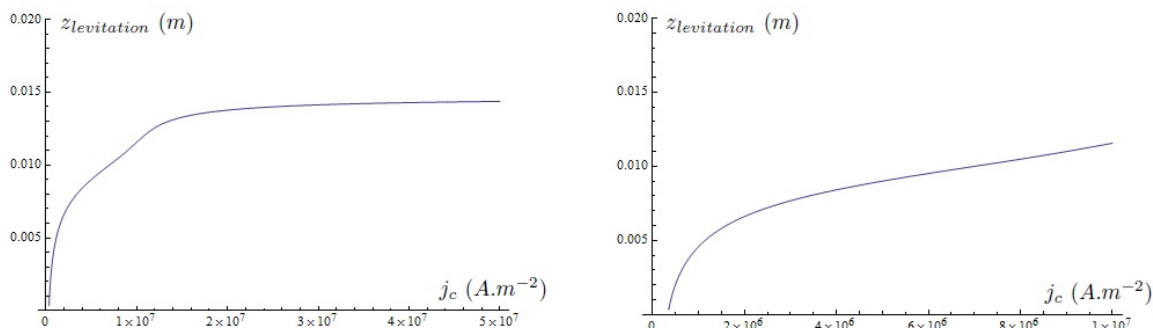
Les dimensions choisies dans cette partie correspondent à celles de notre modèle réduit.

Hauteur de lévitation et courant critique. Choix du supraconducteur :

Dans cette partie, nous fixons les paramètres aux valeurs qu'ils prendront en moyenne dans le cas de notre modèle réduit, et nous étudions l'évolution de la hauteur de lévitation en fonction de j_c . Nous choisirons $h = 1 \text{ cm}$, $R = 5 \text{ mm}$, $d = 5$, $L_a = 4 \text{ cm}$, $l_a = 1 \text{ cm}$, $h_a = 5 \text{ mm}$ et $Br = 1,3 \text{ Tesla}$ pour les différents tracés et applications numériques. On a également fixé : $m_{chariot} = 0$ (le poids de notre chariot sera en réalité de quelques grammes, mais il n'influe presque pas ici).

Tout d'abord, on remarque que l'équation à résoudre pour trouver $z_{levitation}$ n'a pas de solution si j_c est trop faible. Cela signifie que la lévitation est impossible pour de trop faibles valeurs de la densité de courant critique. Pour les paramètres que l'on a choisis la valeur seuil de j_c est d'environ 35 A.cm^{-2} . On voit d'ors et déjà le caractère crucial que joue j_c dans le mécanisme de lévitation.

Traçons la hauteur de lévitation en fonction de j_c . On choisi différentes échelles pour le choix de j_c afin de bien cerner le comportement de la courbe :



On commence par remarquer qu'à partir de quelques centaines de $A.cm^{-2}$ la hauteur de lévitation est comprise entre $0,5\text{ cm}$ et $1,5\text{ cm}$ ce qui est tout à fait convenable étant donné le dimensionnement de notre système train/rails. Ensuite, on voit que la hauteur de lévitation reste en dessous d'un certain seuil et donc qu'il est inutile de chercher à augmenter inconsidérément j_c pour obtenir de grandes hauteurs de lévitation.

Nous avons choisi de travailler avec le matériau supraconducteur $YBa_2Cu_3O_7$ dès le premier mois de notre PSC. Ce matériau a déjà été évoqué plus haut car historiquement il s'agit du premier matériau qui a permis d'entrevoir une utilisation à l'échelle industrielle de la supraconductivité. Tout d'abord sa température critique est d'environ $92K$ donc on peut le refroidir à l'aide d'azote liquide ce qui est en pratique très confortable. En effet l'azote liquide est moins onéreux que l'hélium liquide, et il est relativement facile de s'en procurer.

De plus, la synthèse de $YBa_2Cu_3O_7$ est un procédé aujourd'hui complètement maîtrisé, relativement rapide et sans risque (contrairement à celle du $HgBa_2Ca_2Cu_2O_8$ qui fait intervenir du mercure, par exemple). Notons que la majorité des articles de physiciens traitant des supraconducteurs publiés de 1987 à aujourd'hui se basent sur $YBa_2Cu_3O_7$, ceux cités dans notre bibliographie ne constituent pas une exception à cette règle.

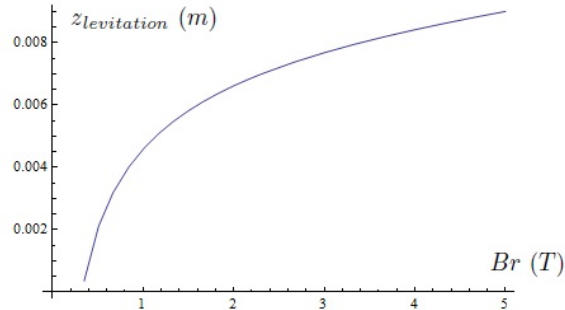
Enfin, nous pouvons maintenant constater avec notre modèle numérique que ce matériau possède un autre atout majeur : son courant critique. Le courant critique de $YBa_2Cu_3O_7$ est relativement élevé comparé à ceux observés chez la plupart des autres supraconducteurs de type II. Typiquement, il n'est pas rare de mesurer des densités de courant critique de l'ordre de 200 A.cm^{-2} à 80 K ce qui correspond, pour les paramètres que nous avons choisis, à une hauteur de lévitation de 7 mm , ce qui est tout à fait convenable (car du même ordre de grandeur que la hauteur de la pastille par exemple). Ainsi l'Yttrium Baryum Copper Oxyde semble être le candidat parfait pour faire léviter notre train. Il reste alors à comparer les hauteurs de lévitation effectivement obtenues à celles prédites ici. Ceci sera fait plus bas.

Hauteur de lévitation et champ de rémanence. Choix des aimants :

Cette fois-ci nous fixons j_c à 100 A.cm^{-2} , $d = 5$ (densité moyenne de $YBa_2Cu_3O_7$) et R, h, L_a, l_a, h_a et $m_{chariot}$ aux mêmes valeurs que précédemment. Il s'agit maintenant d'étudier la dépendance de $z_{levitation}$ en Br .

On commence par remarquer qu'il faut que Br soit suffisamment élevé pour que la lévitation soit possible. Pour les valeurs des paramètres choisis il faut que l'on ait $Br > 0.35 T$.

On trace la hauteur de lévitation en fonction de Br pour les paramètres choisis plus haut :



On remarque sans surprise que la hauteur de lévitation croît avec Br . Nous voyons également qu'il semble raisonnable de prendre un aimant tel que Br est supérieur à 1 *Tesla* car alors on se laisse une certaine marge de manœuvre quant au poids de la locomotive qui va avoir tendance à diminuer $z_{levitation}$.

C'est à partir de ces considérations que nous avons choisi **les aimants composants les rails**. Notre choix s'est porté sur des aimants de Néodyme-Fer-Bore (*NdFeB*) qui possède un champ de rémanence d'environ 1,3 T, ce qui donne pour les paramètres choisis une hauteur de lévitation de plus de 5 mm, ce qui encore une fois est particulièrement convenable.

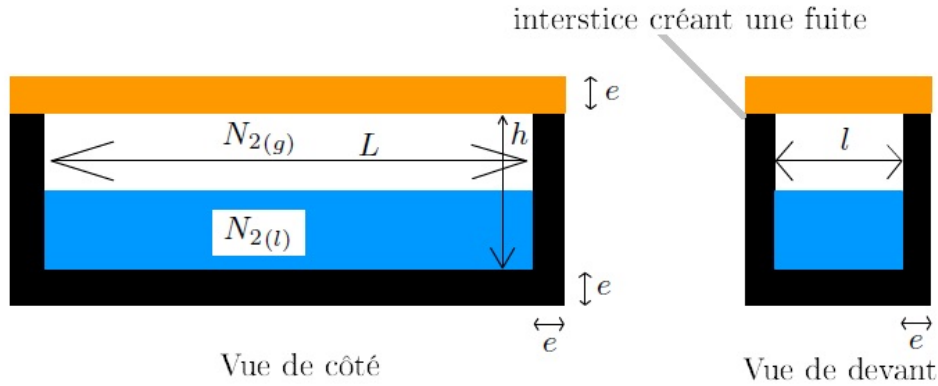
Conclusions

Nous avons maintenant complètement décrit la partie du modèle numérique simulant la lévitation de notre train. Nous avons également donné les prédictions *en amont* de ce modèle concernant la maquette que nous avons construite en laboratoire. *La validité de ce modèle par rapport aux mesures expérimentales sera étudiée dans la partie 4.2.*

4.1.4 Modélisation du système de refroidissement

Le système de refroidissement choisi est le suivant : la locomotive comporte un réservoir rempli d'azote liquide au fond duquel sont disposées la ou les pastilles supraconductrices. L'objet de cette partie consiste à déterminer le temps d'évaporation de l'azote liquide pour une cuve initialement pleine.

On suppose que le réservoir de la locomotive est un parallélépipède rectangle de dimensions L , l et h et qu'il est fabriqué dans un matériau homogène d'épaisseur e .



Hypothèses :

- Le réservoir est étanche excepté au niveau du couvercle : il y a un interstice d'épaisseur i .
- Le gaz contenu dans le réservoir est composé uniquement de diazote. Ceci est dû au fait que, initialement, il n'y avait que de l'azote liquide dans le réservoir.
- On suppose que la température du gaz est uniforme, ce qui est justifié par la faible étendue spatiale du réservoir.
- On suppose que la température extérieure est constante et égale à la température ambiante T_a .

Calculons le flux thermique Φ_{parois} au travers des parois du réservoir. On considère pour cela que ces flux sont toujours dirigés selon la normale à la paroi considérée.

On a, avec K_m la conductibilité thermique du matériau dont le chariot est constitué :

$$\frac{\partial \Phi_{parois}}{\partial S} = -K_m \frac{\partial T}{\partial n}$$

où S est une surface et $\frac{\partial T}{\partial n}$, la dérivée normale de T au niveau de la paroi.

En supposant que la dérivée normale de T a la même valeur partout, on obtient :

$$\Phi_{parois} = -K_m [2(lL + lh + Lh)] \frac{\partial T}{\partial n}$$

De plus, on considère que l'interstice est d'épaisseur i constante, et que celui-ci ne contient que du N_2 gazeux. Cette hypothèse est justifiée par le fait que la pression dans le réservoir est constante et égale à la pression atmosphérique.

On peut donc calculer le flux thermique dû aux fuites par les interstices :

$$\Phi_{fuites} = -K_{N_2} 2(l + L)i \frac{\partial T}{\partial n}$$

Enfin, on considère que tant que tout l'azote liquide ne s'est pas évaporé, la température dans le réservoir est constante et égale à la température d'ébullition du diazote : T_{N_2} .

On est donc en régime permanent. D'où, d'après l'équation de la chaleur :

$$\Delta T = 0$$

On veut connaître : $\frac{\partial T}{\partial n}$. Pour ce calcul, on considère une paroi de normale \vec{e}_z . On a :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0$$

Donc $T(z) = Az + B$ avec : $T(0) = B = T_{N_2}$ et $T(e) = Ae + B = T_a \Rightarrow A = \frac{T_a - T_{N_2}}{e}$

Par conséquent on obtient la dérivée normale de T :

$$\frac{\partial T}{\partial n} = \frac{T_a - T_{N_2}}{e}$$

Au final, on peut calculer le flux total :

$$|\Phi_{total}| = 2[K_m(lL + lh + Lh) + K_{N_2}(l + L)] \frac{T_a - T_{N_2}}{e}$$

Dans nos hypothèses, la perte d'énergie due à ce flux thermique est compensée par l'ébullition de l'azote liquide. D'où, en notant ΔH la chaleur latente massique d'ébullition du $N_2(l)$ et m_{N_2} la masse de N_2 liquide :

$$|\Phi_{total}| dt = \Delta H dm_{N_2}$$

On intègre cette équation sur toute la durée d'évaporation de l'azote liquide :

$$|\Phi_{total}| \Delta t = \Delta H m_{N_2}(0)$$

En notant le volume du supraconducteur V_S , on a : $m_{N_2}(0) = \mu_{N_2}(Lhl - V_S)$ (avec μ_{N_2} la masse volumique de l'azote liquide). On obtient comme durée d'évaporation :

$$\Delta t = \frac{\mu_{N_2}(Lhl - V_S)\Delta H}{2[K_m(lL + lh + Lh) + K_{N_2}(l + L)] \frac{T_a - T_{N_2}}{e}}$$

Choix du matériau : Cette formule nous a orienté concernant le choix du matériau dont était constitué le chariot. En effet, si on prend en compte la capacité d'isolant thermique du matériau caractérisée par K_m et sa légèreté on voit que la gamme de matériaux répondant à nos attentes est restreinte. À titre d'exemple, voici les propriétés de quelques matériaux :

Matériau	Conductivité thermique ($W.m^{-1}.K^{-1}$)	Masse volumique à 20 °C ($g.cm^{-3}$)
Cuivre	390	8,96
Aluminium	237	2,70
Carbone	129	3,15
Caoutchouc	0,36	0,86
Polystyrène expansé	0,036	0,015
Polystyrène extrudé	0,035	0,037

Nous avons ainsi choisi de travailler avec du polystyrène extrudé. L'application numérique de la formule plus haut et sa comparaison avec les mesures effectuées permettra de valider la modélisation du refroidissement effectuée. *Cette validation du modèle numérique est traitée dans la partie ci dessous.*

4.2 Modèle réduit du train

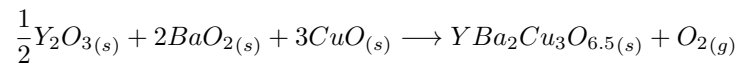
Dans cette partie nous commençons par décrire la conception de la maquette de train à lévitation magnétique à travers ses trois phases : la synthèse du matériau supraconducteur, la conception des rails et l'élaboration du chariot. Nous décrivons ensuite l'ensemble des mesures effectuées sur notre modèle réduit avant de conclure quant à la validité de notre modèle numérique.

4.2.1 Synthèse du matériau supraconducteur

Rappelons que le matériau supraconducteur que nous avons choisi est l' $YBa_2Cu_3O_7$.

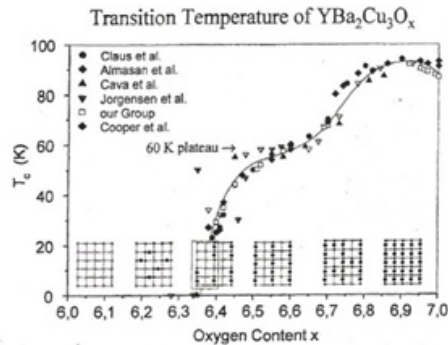
Présentation du mécanisme de synthèse

Nous allons en réalité commencer par synthétiser du $YBa_2Cu_3O_{6.5}$ en nous basant sur la réaction suivante faisant intervenir trois matériaux précurseurs :



Pour que la réaction ait lieu il faut chauffer les réactifs (qui se présentent sous forme de poudre) aux alentours de $1000^\circ C$.

Le matériau obtenu n'est pas aussi bon supraconducteur que l' $YBa_2Cu_3O_7$. De manière générale, l' $YBa_2Cu_3O_{7-\delta}$ n'est supraconducteur que pour $\delta < 0,65$ et sa température critique est d'autant plus élevée que δ est faible.



Température critique de l' $YBa_2Cu_3O_x$ en fonction de x

Ainsi une phase d'oxygénation qui s'effectue à environ $450^\circ C$ doit suivre la synthèse de l' $YBa_2Cu_3O_{6.5}$ afin d'obtenir un matériau supraconducteur convenable.

Réalisation expérimentale de la synthèse

La synthèse du matériau supraconducteur a été une des premières étapes de notre projet et s'est déroulée dès le mois d'octobre.

Afin d'obtenir une quantité de matériau supraconducteur suffisante et de qualité souhaitée, nous avons décidé de fabriquer $\frac{1}{5}$ ème de mole d' $YBa_2Cu_3O_7$.

La synthèse s'est révélée très délicate, d'une part parce qu'il fallait éviter les impuretés extérieures pouvant diminuer l'efficacité de la lévitation (en diminuant j_c par exemple), et d'autre part le mélange des produits devait s'effectuer sans pertes pour préserver la stœchiométrie du mélange. C'est pourquoi ce travail devait être effectué avec minutie. Nous nous sommes donc répartis en trois groupes, chaque groupe devant obtenir $\frac{1}{15}$ ème de mole d' $YBa_2Cu_3O_7$.

Tout d'abord il a fallu peser les matériaux précurseurs sous forme de poudre pour obtenir le mélange :

- 7.53g d' $Y_2O_3(s)$ soit $\frac{1}{30}$ ème de mole
- 22.58g de $BaO_2(s)$ soit $\frac{4}{30}$ ème de mole
- 15.91g de $CuO(s)$ soit $\frac{6}{30}$ ème de mole

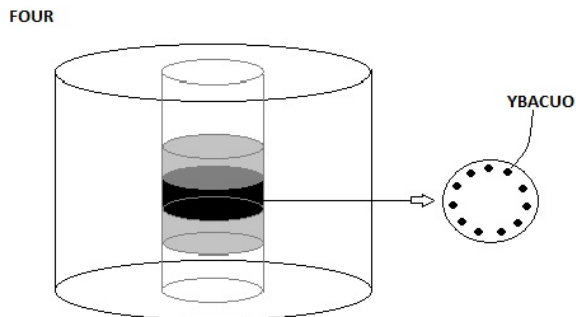
Chaque groupe a ensuite fait en sorte d'obtenir un mélange homogène à l'aide d'un mixeur électrique. Cette étape est apparue comme déterminante pour la qualité du supraconducteur car elle est intimement liée à l'homogénéité du matériau.



Une fois le mélange obtenu, nous avons compressé la poudre sous la forme de petites pastilles cylindriques compactes.

32 pastilles furent ainsi synthétisées.

L'étape suivante fut celle de la cuisson : On a placé les pastilles dans un four. Ce four a atteint 1000°C en 8 heures, la fusion des pastilles a alors eu lieu. Puis nous avons refroidi le four à 450°C tout en faisant passer un flux d'air dans le four pour oxygéner les pastilles.



Les 32 pastilles obtenues possédaient toutes un rayon d'environ 5 mm et une hauteur de 5 mm.

Refonte d'une plus grande pastille

Afin d'obtenir, un chariot plus grand, nous avons choisi de briser six petites pastilles et de les réduire en poudre avant de presser une pastille de rayon 1 cm et d'épaisseur 3 mm . Puis nous avons recommencé le processus de cuisson et d'oxygénation décrit plus haut. Cependant, comme nous le décrirons plus bas, les mesures effectuées sur cette grande pastille ont montré une absence de propriétés supraconductrices à 77 K et nous avons dû recommencer le processus d'oxygénation une seconde fois, et cette nouvelle tentative s'est également soldée par un échec.

Après ces échecs des mois de février/mars, notre emploi du temps et celui du four (les élèves du MODAL en prirent possession) rendaient la fabrication de notre grande pastille impossible durant la fin du mois d'avril. Pour être sûr d'avoir une grande pastille, deux démarches furent alors entreprises en parallèle. Nous ne renonçons pas à fabriquer notre propre grande pastille, mais dans un autre temps nous prévoyons l'achat d'une grande pastille afin de pouvoir tout de même tester les propriétés d'un plus grand chariot.

Ceci montre bien que la synthèse de notre matériau supraconducteur l'YBACuO est un **procédé incertain**. Heureusement, notre première tentative fut bonne : bien qu'ayant des caractéristiques très inégales, certaines de nos premières pastilles ont (comme nous le verrons) de très bonnes propriétés supraconductrices et sont capables de soulever le train de manière satisfaisante.

4.2.2 Conception des rails

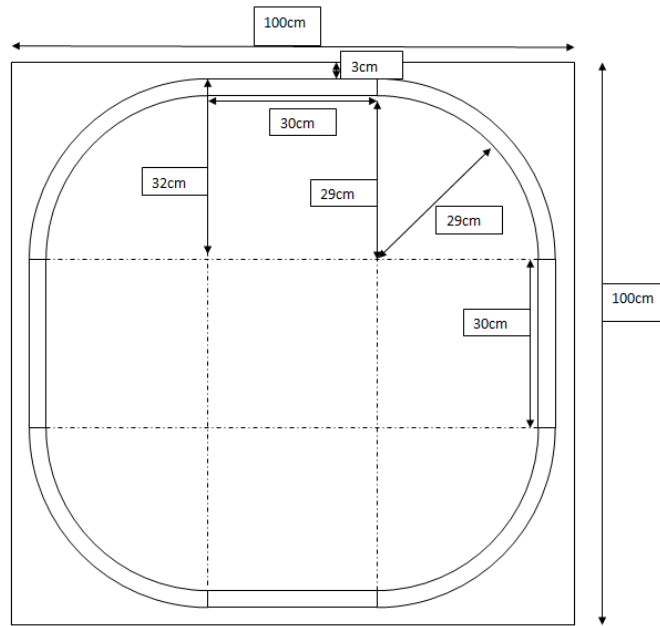
Comme décrit plus haut dans la partie modélisation, nous avons opté pour des rails constitués de trois rangées d'aimants. La largeur des rails retenue est 3 cm (trois aimants d'une largeur de 1 cm). Nous avons choisi d'établir un circuit fermé disposé sur un support de $1\text{ m} \times 1\text{ m}$. Ce circuit comporte quatre portions rectilignes de longueur 30 cm et quatre portions circulaires de rayon intérieur 29 cm .

Les parties rectilignes sont constituées d'aimants de longueur 4 cm , alors que les portions circulaires utilisent des aimants de longueur 1 cm . Tous les aimants utilisés ont une largeur de 1 cm et une hauteur de 5 mm . Ce sont des aimants de Néodyme-Fer-Bore (*NdFeB*) qui possèdent un champ magnétique de rémanence de $1,3\text{ T}$ environ.

Remarque Afin de pouvoir nous procurer les aimants nous avons créé un "binet" et nous avons reçu des subventions de la *Kes* et de de *X-forum*. Nous nous sommes également fait sponsoriser par le fournisseur des aimants : *Super-magnete*.

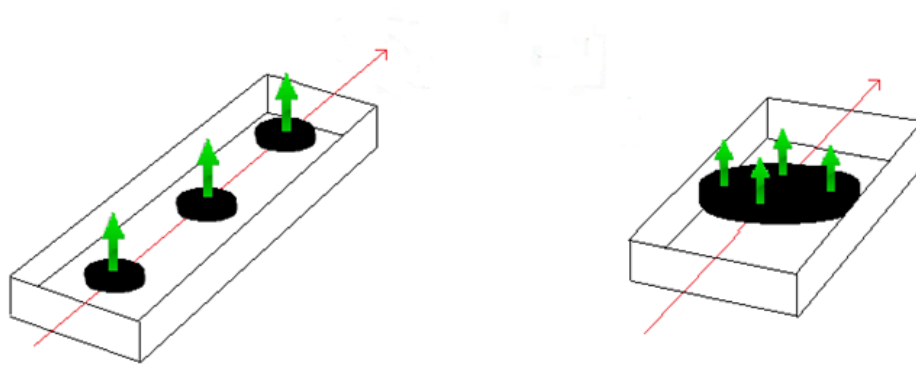
Les aimants de notre système ont été disposés sur une plaque de fer doux que nous avons usinée grâce à une scie à matériau fournie par le *Styx*. Le fer doux est un matériau avec une très faible force coercitive, ce qui veut dire qu'il est facilement aimanté, cela assure donc une forte cohésion de nos aimants sur le support et en-même temps évite l'utilisation de colle.

La mise en place des aimants sur la plaque de fer doux est un processus long et épuisant. En effet, la relativement grande puissance des aimants développe des forces d'attraction et de répulsion élevées et il faut beaucoup de patience pour élaborer le circuit dans son intégralité. Par ailleurs, l'orientation des aimants joue une importance cruciale il faut donc constamment vérifier (à l'aide d'autres aimants) que celle-ci est correcte.



4.2.3 Conception du chariot

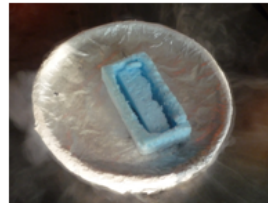
Nous avons confectionné plusieurs chariots, tous constitués de polystyrène extrudé. Le premier devait contenir une grosse pastille. Cependant, comme nous l'avons vu, nous ne disposons aujourd'hui que de petites pastilles c'est pourquoi nous nous sommes tournés vers un plus petit chariot contenant trois petites pastilles.



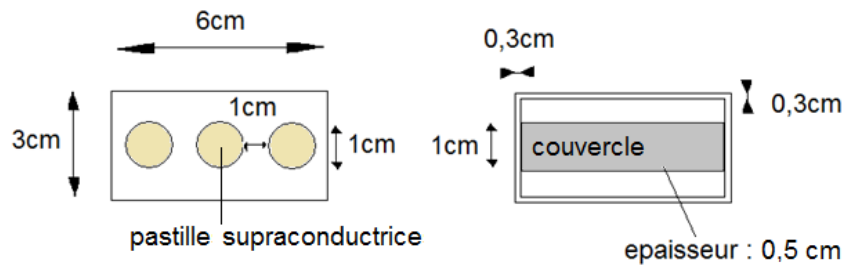
Nous avons confectionné le petit chariot en polystyrène extrudé, matériau léger et bon isolant thermique. Ce dernier transporte trois pastilles de 1 cm de diamètre et d'une hauteur de 5 mm. Le poids total du chariot est de 7,39 g (pastilles y compris). Voici ses dimensions, ainsi que quelques photos :



vue de dessous



vue de dessus



vue de côté



4.2.4 Comparaison des mesures avec le modèle numérique

Il s'agit maintenant de valider notre modèle informatique modélisant la lévitation de notre train et l'autonomie du système de refroidissement.

Hauteur de lévitation

Si on reprend les données obtenues par traitement vidéo sur nos pastilles, on obtient en excluant la chute de la pastille, une hauteur moyenne de lévitation de :

$$z_{\text{levitation}} = 4,67 \text{ mm}$$

Or voici les prédictions obtenues par notre modèle informatique lorsque les différents paramètres sont adaptés à notre maquette (on ne connaît pas la densité de courant critique j_c des trois pastilles car il aurait fallu les détruire pour la connaître mais on suppose que celle-ci est comprise entre 100 et 200 $A.cm^{-2}$ comme le suggère les mesures effectuées sur la pastille représentative D2).

$j_c(A.cm^{-2})$	Hauteur de lévitation (mm)	Écart relatif par rapport à la mesure
100	4,44	4,92%
125	5,15	9,30%
150	5,70	18,1%
175	6,13	23,8%
200	6,50	28,1%

On constate que notre modèle donne un très bon ordre de grandeur de la hauteur de lévitation. Par ailleurs, il faut prendre en compte le fait que les pastilles se réchauffent au contact de l'extérieur. Donc elles présentent, de manière probable au vu des mesures de j_c effectuées plus haut, des densités de courant critique plus proches de 100 $A.cm^{-2}$ que de 200 $A.cm^{-2}$ au bout d'un certain temps, ce qui explique d'ailleurs la légère décroissance de la hauteur de lévitation avec le temps. En prenant en compte cette remarque et en constatant que l'écart relatif des valeurs numériques aux valeurs mesurées est inférieure à 10% pour des valeurs de j_c correspondant à environ 100 $A.cm^{-2}$, on peut conclure sur la bonne qualité de prédiction de notre modèle numérique.

Autonomie du système de refroidissement

On obtient, en s'appuyant sur l'exploitation des mesures vidéos, l'autonomie du modèle réduit :

$$\Delta t = 50 \text{ s}$$

Remarque : Cette faible durée s'explique par la très faible contenance du chariot. Une des raisons qui nous a poussé en vain à synthétiser une pastille plus grosse et donc à augmenter la taille du chariot était la volonté d'obtenir une plus grande autonomie du système de refroidissement.

Notre modèle numérique, avec les paramètres relatifs à notre modèle réduit prévoit une autonomie de :

$$\Delta t = 65,4 \text{ s}$$

Le résultat numérique obtenu est du même ordre de grandeur que le résultat expérimental, ce qui valide notre modélisation du refroidissement du système qui ne prend pas en compte le phénomène de convection qui est d'autant plus petit que le chariot a une faible contenance.

Conclusion

Les résultats obtenus en laboratoire avec notre maquette de train semblent être en accord avec les simulations informatiques. On notera la bonne précision du modèle numérique, qui donne des erreurs relatives d'au plus 25% avec l'expérience, étant donné les nombreuses hypothèses qui ont été effectuées pour simplifier le problème.

Ainsi, notre modèle numérique a de forte probabilité d'offrir des ordres de grandeurs corrects concernant une application à échelle humaine des trains à lévitation supraconductrice. Ces considérations seront abordées dans la conclusion du rapport.

5 Côté et financement

Le coût du projet se divise essentiellement en deux parties : le coût de fabrication des pastilles d'YBaCuO et le coût d'achat du matériel nécessaire pour la mise en place des rails.

5.0.5 Coût de fabrication de la pastille

Le coût de fabrication du l'YBaCuO est globalement égal à la somme du prix des produits et du coût de la consommation du four pendant la cuisson et l'oxygénation des pastilles.

Le prix des produits :

La fabrication des pastilles a nécessité l'utilisation de :

7,53 g de Y_2O_3
22,58 g de BaO_2
15,91 g de CuO

Les prix à l'achat de ces produits sont donnés dans le tableau ci-dessous :

Produit	Prix en euros
Y_2O_3	19
BaO_2	51
CuO	136
Total	206

Consommation du four :

Au coût des produits s'ajoute celui de la consommation du four. La phase de cuisson des petites pastilles a duré une journée, puis la phase d'oxygénation deux semaines. La phase d'oxygénation a été répétée deux fois pour la grande pastille, une fois pendant deux semaines et une fois pendant une semaine.

Au total le four a donc été allumé pendant 35 jours pour les différentes phases de cuisson et d'oxygénation. Or la consommation moyenne du four est de 18 KW. En effet, le four est chauffé grâce à une résistance de 5 Ohm alimentée à 60A en moyenne. Le prix du KWh est facturé par EDF 0,1137 euro (heures creuses prises en compte). La consommation du four coûte donc environ 2 euros l'heure. Ainsi le prix total de la phase de cuisson et d'oxygénation s'élève à $35 \times 24 \times 2 = 1680$ euros.

Aujourd'hui, après deux essais d'oxygénation de la grande pastille, nous ne sommes pas arrivés à avoir de la supraconductivité à 77K, on prévoit donc, à partir de début mai, une phase d'oxygénation supplémentaire qui durera 2 semaines et qui coûtera d'après nos calculs précédents $14 \times 24 \times 2 = 672$ euros.

Ainsi, le coût total de la fabrication des pastilles d'YBaCuO est approximativement égal à 2558 euros. Ce coût est pris en charge par le Trex de physique et le laboratoire de l'École Polytechnique qui ont fourni les produits et se sont chargés de l'alimentation électrique.

5.0.6 Coût de mise en place des rails

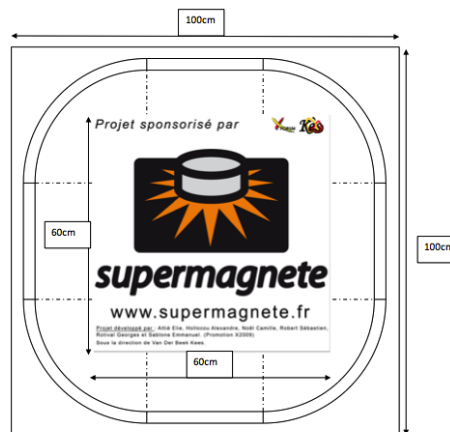
Le rail est composé d'une plaque métallique en fer doux (carrée de 1 m de côté) sur laquelle sont posés 700 aimants de néodyme N42 pour former le circuit. Pour l'achat de la plaque métallique nous sommes passés par le fournisseur de métal de l'École Polytechnique qui est *CGMétaux*, une société située à Argenteuil. La plaque métallique achetée était de dimensions 2×1 m avant la découpe, elle a coûté 86,11 euros.

En ce qui concerne les aimants, plusieurs fournisseurs sont disponibles sur le marché. Nous avons donc essayé de négocier les prix en proposant des offres de sponsoring de notre projet.

Deux fournisseurs étrangers non européens : **China Rare Earth Magnet Co** en Chine et **Applied Magnets** aux Etats-Unis, proposaient des prix très intéressants pour les aimants, jusqu'à 4 fois moins chers que les fournisseurs européens. Le problème avec ces fournisseurs touchait le délai de livraison qui pouvait aller jusqu'à trois voire quatre semaines, sans aucune garantie, et à des coûts de livraison très élevés (150 \$ dans le cas de China Rare Earth Magnet et 400 \$ pour Applied Magnets). Nous avons donc décidé de nous limiter dans nos recherches à des fournisseurs européens.

Plusieurs fournisseurs sont présents sur le marché européen, ils sont de différentes tailles. Le plus grand de ces fournisseurs est SuperMagnet avec un stock de plus de 10 millions d'aimants. D'autres fournisseurs ont été contactés, ils ont refusé notre demande de sponsoring étant donné que leur taille ne permettait pas de prévoir des budgets pour du sponsoring. Ces fournisseurs nous ont conseillé de consulter SuperMagnet qui était, d'après eux, le leader Européen du marché d'aimants.

Une demande de sponsoring a donc été faite auprès du service communication et marketing de SuperMagnet. L'axe principal de nos négociations s'est porté sur le fait que l'année 2011 est le centenaire de la découverte de la supraconductivité, donc plusieurs événements et exposés prendront lieu et notre projet aura l'occasion d'y être exposé.



Les négociations se sont bien déroulées, et nous avons pu conclure très rapidement un contrat de sponsoring avec cette société. D'après ce contrat, nous nous engageons à mettre le logo de SuperMagnet et leur site web au centre de notre maquette comme le montre la figure ci-dessus. À cela s'ajoute l'obligation de leur

envoyer à la fin du projet un rapport décrivant notre projet et quelques photos et vidéos de nos essais et exposés. En retour, SuperMagnete s'est engagé à nous fournir des réductions sur nos achats.

La commande à SuperMagnete a donc porté sur les articles suivants :

Produit	Dimensions	Prix U TTC EUR	Quantité	Total TTC EUR
Q 10 10 05 N	10*10*5 mm	0.56	600	336
Q 40 10 5	40*10*5 mm	1.29	100	129

Total EUR	465
Réduction EUR	265
À payer EUR	200

Nous avons donc réussi à économiser 265 euros sur l'achat des aimants. Enfin, l'impression du poster de sponsoring collé sur la plaque à l'imprimerie de l'École Polytechnique nous a coûté 17 euros.

5.0.7 Coût final et financements

Le coût final du projet s'élève donc à $200 + 80 + 14 + 2558 = 2852$ euros.

Le financement du projet s'est effectué grâce aux subventions du binet Xforum et de la Kes des élèves. Ainsi, un binet a été créé sous le nom "**binet supraconductix**", avec Emmanuel Sablone en tant que président et Elie Attié en tant que trésorier. La création du binet nous a permis d'avoir 100 euros de subvention de la part de XForum et les subventions de la Kes des élèves seront connues fin juin. Le reste des coûts sera payé par les membres du PSC.

5.0.8 Coûts supplémentaires

Suite aux problèmes rencontrés lors de l'oxygénation qui empêchent d'observer de la supraconductivité avec notre grande pastille à 77K, un plan de secours est prévu dans le cas où la prochaine oxygénation de notre pastille échoue. Ce plan consiste à acheter directement notre pastille supraconductrice sur le marché. Une commande est prévue dans les jours qui viennent. Elle porte sur l'achat de deux pastilles supraconductrices de qualité standard coûtant 130 euros l'unité et une pastille de haute qualité coûtant 450 euros. L'achat de ces pastilles sera financé par le Trex de physique et le laboratoire de l'École Polytechnique.

5.1 Ce qu'il reste à faire

Comme nous l'avons vu les différentes opérations d'oxygénation de la grosse pastille ont été un échec. En effet, la phase d'oxygénation est très délicate et doit s'effectuer à température précise (450 K). Les fluctuations de température ont provoqué l'échec de ces opérations et des mesures récentes, effectuées à basse température avec de l'hélium liquide, ont montré que la température critique de la grosse pastille était d'environ 60 K. Une nouvelle tentative d'oxygénation est prévue la semaine du 2 mai pour essayer de mieux oxygéner la pastille en surveillant de plus près la température du four.

Cela n'étant pourtant pas une garantie du succès de l'opération, un "plan B" a été lancé pour acheter des pastilles de haute performance auprès de fournisseurs d'YBaCuO sur le marché. Dans les deux semaines à venir, après l'achèvement de l'opération d'oxygénation, nous aurons une idée plus claire sur la pastille que nous utiliserons pour notre chariot.

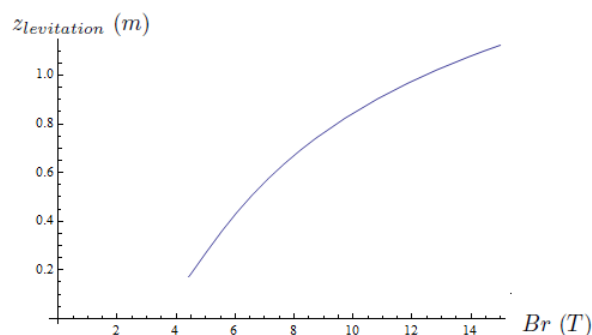
6 Conclusion

6.1 Prévisions du modèle à grande échelle

Un des grands intérêts de notre projet PSC consiste en la force de prévision de notre modèle numérique, validé expérimentalement à petite échelle, concernant des applications de la supraconductivité au domaine des transports à échelle *humaine*. Ces prévisions ne donnent des contraintes qu'en terme d'ordre de grandeur, et il est clair qu'il faudrait une étude beaucoup plus poussée avant de se lancer dans une telle aventure industrielle.

Nous avons fixé dans cette étude les dimensions des rails à une largeur de 3 m pour une hauteur de 10 cm , les pastilles supraconductrices considérées ont un rayon de 1 m et une hauteur de 5 cm .

On commence par étudier la puissance nécessaire aux aimants pour qu'un train (on ne considère qu'un wagon) de 10 tonnes décolle du sol.

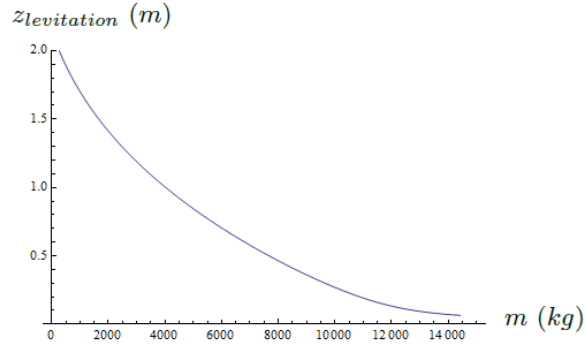


Simulation : Hauteur de lévitation en fonction du champ magnétique de rémanence

On voit que les aimants doivent avoir un champ de rémanence d'au moins 3 T pour qu'un tel train puisse léviter.

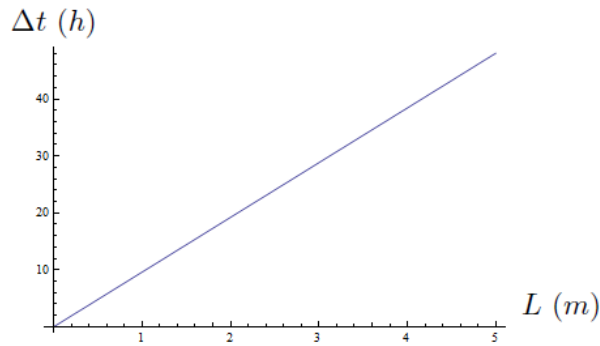
On voit ici apparaître une des contraintes majeures d'un tel moyen de transport. Il est en effet aujourd'hui impossible d'obtenir des aimants d'aussi grande taille et possédant une telle puissance. Par ailleurs, pour élaborer les rails il faudrait un nombre considérable de tels aimants, ce qui apparaît aujourd'hui comme inaccessible.

On observe cependant que, passée cette importante contrainte, le système serait capable de faire léviter le train à des hauteurs tout à fait convenables (de l'ordre de la dizaine de centimètre).

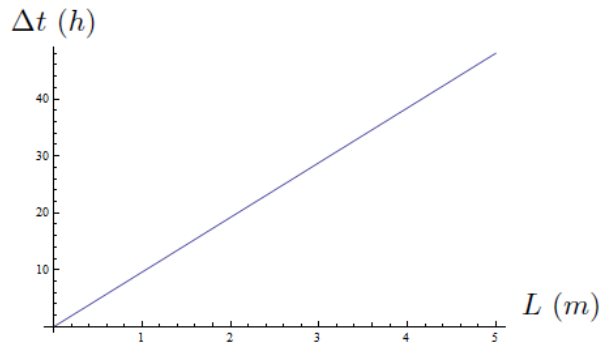


Simulation : Hauteur de lévitation en fonction de la masse du train

Il reste à se préoccuper du problème du refroidissement. On étudie pour ceci l'autonomie d'un système de refroidissement constitué d'une cuve carrée d'azote liquide de côté de longueur L et d'épaisseur e en polystyrène extrudé (hypothèse forte étant donné la fragilité de ce matériau). On fait varier les paramètres L et e et on simule la durée d'autonomie Δt à l'aide de notre modèle.



Simulation : Autonomie du système de refroidissement en fonction de la taille du réservoir L (épaisseur 10 cm)



Simulation : Autonomie du système de refroidissement en fonction de l'épaisseur du réservoir e (taille $L = 1$ m)

On voit que pour arriver à des autonomies convaincantes, de l'ordre de la dizaine d'heures, il est nécessaire de travailler avec des réservoirs d'azote liquide de plus d' 1 m^3 de volume, ce qui est considérable étant donné

que l'on considère un train d'une largeur de 3 *m*. Un tel système de refroidissement est donc volumineux. Il faut noter, par ailleurs, qu'il faut une cuve d'azote liquide pour chaque pastille, donc a fortiori au moins une par wagon, ce qui représente une contrainte non négligeable.

En conclusion, nous voyons que la lévitation supraconductrice est en théorie tout à fait applicable à l'échelle *humaine*. Cependant, deux grosses contraintes apparaissent : celle de la génération du champ magnétique et celle du refroidissement. Par conséquent, un certains nombres d'avancées techniques sont nécessaires pour rendre envisageable un tel moyen de transport. Parmi elles citons : la découverte de supraconducteur à plus haute température critique et la capacité à générer des champs magnétiques permanents (ou quasi-permanents) puissants.

7 Remerciements

Nous tenons à remercier avant tout notre tuteur, M. Kees Van der Beek, pour sa disponibilité, l'enthousiasme avec lequel il a accueilli notre projet, et les précieux conseils qu'il nous a apporté.

Nous remercions également le laboratoire de physique des solides d'Orsay pour nous avoir montré son train supraconducteur.

Enfin nous tenons à remercier **Supermagnete**, la **Kès** et le binet **X-forum**, nos sponsors.

Bibliographie

- [1] C. P. Bean, *Phys. Rev. Let.* **8** 6 (1962)
- [2] C. P. Bean, *Rev. Mod. Phys.* **36** 31 (1964)
- [3] E.H. Brandt, *Am. J. Phys.* **58** 1 (1990)
- [4] E.H. Brandt, *Phys. Rev. B* **54** 6 (1996)
- [5] E.H. Brandt, *Phys. Rev. B* **58** 10 (1998)
- [6] Dong-Ho Wy et S. Sridhar, *Phys. Rev. Let.* **65** 16 (1990)
- [7] J. Gilchrist et M. Konczykowski, *Physica C* **212** 43-60 (1993)
- [8] L. Landau et E. Lifschitz, *Physique théorique, Tome VII Électrodynamique des milieux continus*
- [9] Ph. Mangin, *Séminaire IFR matériaux* (23-24 juin 2003)
- [10] M. Nikolo, *Am. J. Phys.* **63** 57 (1995)
- [11] M. J. Qin, G. Li, H. K. Liu, et S. X. Dou, *Phys. Rev. B* **66** 024516 (2002)
- [12] M. I. Youssif, A. A. Bahgat et I. A. Ali, *Egypt. J. Sol.* **23** 2 (2000)